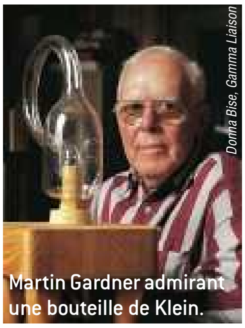
LOGIQUE & CALCUL

L'automate des chiffres

En fixant des règles simples pour transformer une suite de chiffres en une autre, Éric Angelini fait surgir un petit monde étrange et délicat.

Jean-Paul DELAHAYE

Cet article est écrit en hommage à Martin Gardner qui vient de mourir le 22 mai dernier à l'âge de 95 ans. Parmi mille autres sujets, il fit connaître l'automate cellulaire du Jeu de la vie *dont on poursuit l'étude aujourd'hui et auquel il a consacré plusieurs articles et quelques chapitres de ses... 70 livres ! La rubrique de ce mois décrit un automate cellulaire unidimensionel, comme le* Jeu de la vie *au moment où Martin Gardner le faisait découvrir au monde entier. On sait peu de choses sur ce jeu, sinon qu'il apparaît prometteur et plein de ce mystère mathématique que Martin Gardner savait déceler partout et faire partager, avec un infini talent et autant d'enthousiasme, aux millions de gens qui le lisaient.*



Martin Gardner admirant une bouteille de Klein.

Les bons divertissements mathématiques se fondent nécessairement sur des idées simples n'exigeant aucune connaissance abstraite. Les règles de base doivent, autant que possible, donner lieu à des manipulations combinatoires ou géométriques faciles à exécuter : il faut que l'on s'amuse. Enfin, des problèmes naturels de toutes difficultés doivent surgir sitôt les principes fixés.

Ces problèmes conduiront celui qui s'y intéresse à y passer un peu de temps, puis, s'il mord à l'hameçon, à y consacrer des heures, des jours, et pour certains la vie entière. Les flexagones (sujet du premier article de Martin Gardner dans *Scientific American,* en décembre 1956), les carrés magiques, les dissections géométriques, les sudokus, le taquin sont de tels divertissements mathématiques qui séduisent les curieux et leur procurent de longs moments de bonheur.

Éric Angelini est un amateur inventif de jeux mathématiques. Nous avons déjà présenté certaines de ses trouvailles, dont une généralisation de l'idée de nombre premier (*La suite du lézard et autres inventions*, *Pour la Science*, mars 2007). Récemment, il a introduit un automate cellulaire dont l'étude se révèle féconde, quoiqu'encore bien incomplète. Si prochainement, vous ne savez pas quoi faire de quelques jours de vacances, vous avez une occupation.

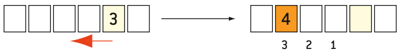
É. Angelini a baptisé son jeu *SoupAutomat*. Ce nom a pour effet que si vous entrez « *SoupAutomat* » dans un moteur de recherche, parmi les pages résultats qui vous seront indiquées et à côté de celles que vous attendez, vous en trouverez une proposant... 23 recettes de soupe aux tomates !

Les règles du jeu

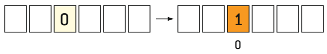
On part d'un nombre ou d'une série de chiffres séparés par des espaces vides (quelquefois symbolisés par des points) et l'on en déduit une nouvelle série de chiffres et de points.

La « loi de déplacement incrémenté » indique que chaque chiffre pair se déplace vers la droite d'autant d'espaces que sa valeur, et est incrémenté avant de se poser :

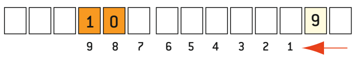
Pour les chiffres impairs, la règle est la même, mais le déplacement se fait vers la gauche. Ainsi 3 devient 4 :



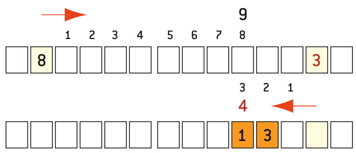
Bien sûr, le zéro reste sur place en se transformant en 1 :



Notons que 9 devient 10, c'est-à-dire deux chiffres occupant deux espaces :

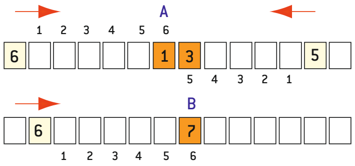


Si plusieurs chiffres arrivent sur la même case, ils s'additionnent et si le total dépasse 9, on l'écrit sur plusieurs cases comme ici :

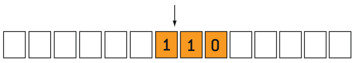


Tout n'est pas terminé, car il faut prévoir comment interagissent les nombres (ayant éventuellement plusieurs chiffres) arrivés sur chaque case. Considérons par exemple deux cases côte à côte AB.

Imaginons que la ligne de départ envoie le nombre 13 sur la case A (car par exemple il y avait un 6, six places à gauche, qui est devenu 7, et un 5, cinq places à droite, qui est devenu 6). De la même façon, la case B reçoit 7 (car il y avait un 6, six places à gauche).



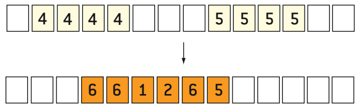
Pour la nouvelle ligne, il faut « superposer » le 13 et le 7. É. Angelini propose que la superposition se fasse en utilisant la règle d'addition de la gauche vers la droite avec retenues pour obtenir 110 :



Quand un total de colonne dépasse 9 (par exemple 12), on pose le 1 et l'on retient 2, qu'on prendra en compte pour le résultat de la case suivante vers la droite.

Cette règle d'addition est un peu étrange, mais elle se justifie par le fait qu'elle est plus facile à effectuer que l'addition usuelle (qui va en arrière), et plus facile à programmer.

Pour vous entraîner, vous pouvez contrôler que la transformation suivante est juste :



Suivons maintenant le devenir du 0 qui, de génération en génération, produit le dessin d'une cascade infinie *(voir la figure 1)*.

L'étonnante vie du zéro

Les générations se suivent et dessinent des motifs de plus en plus compliqués : 0 est la source d'une dynamique impénétrable.

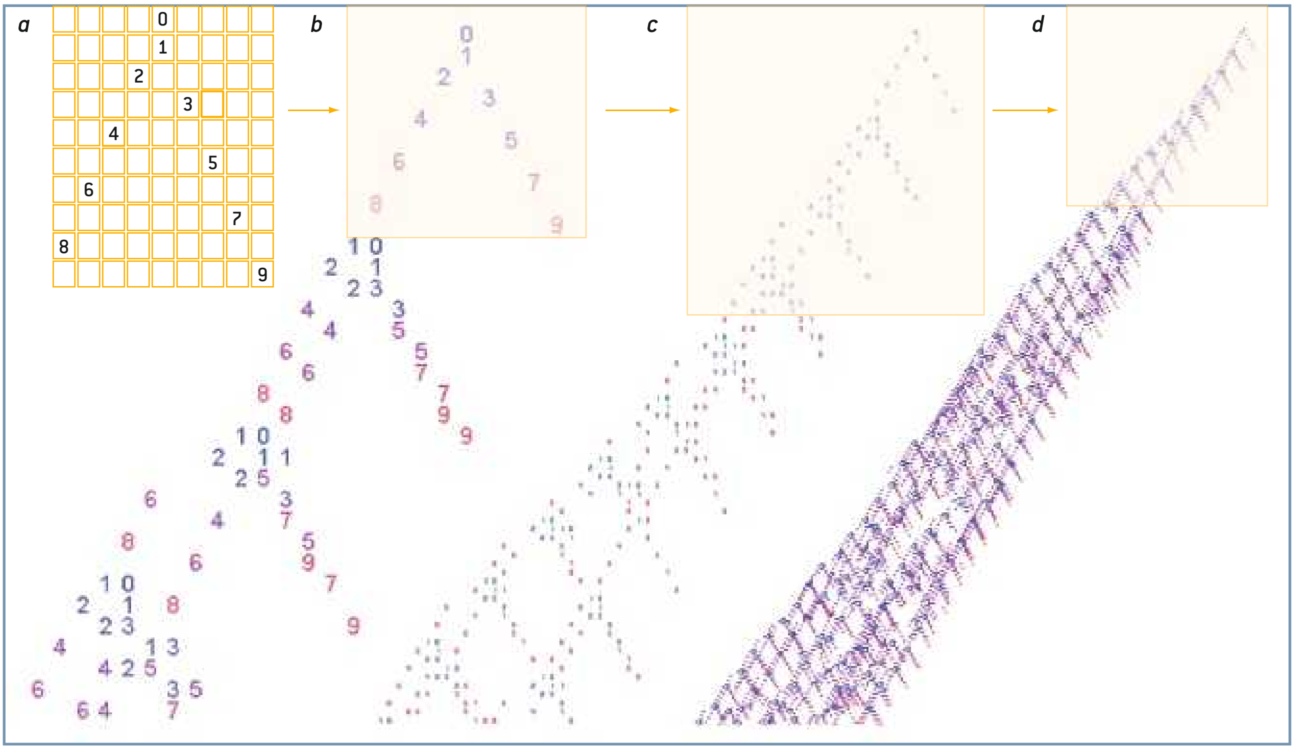
L'allure générale de la cascade de chiffres se décrit simplement : la ligne de chiffres, au départ uniquement 0, s'élargit petit à petit en même temps qu'elle se déplace lentement vers la gauche. L'élargissement est régulier, de même que le glissement vers la gauche. La partie active, de plus en plus large, est assez homogène si on l'observe d'assez loin.

En utilisant d'autres configurations initiales, on obtient le plus souvent un comportement dynamique du même type que celui engendré par 0 : élargissement régulier et déplacement progressif vers la gauche. Un raisonnement heuristique, c'est-à-dire indicatif, mais non rigoureux, explique le déplacement vers la gauche. Le voici :

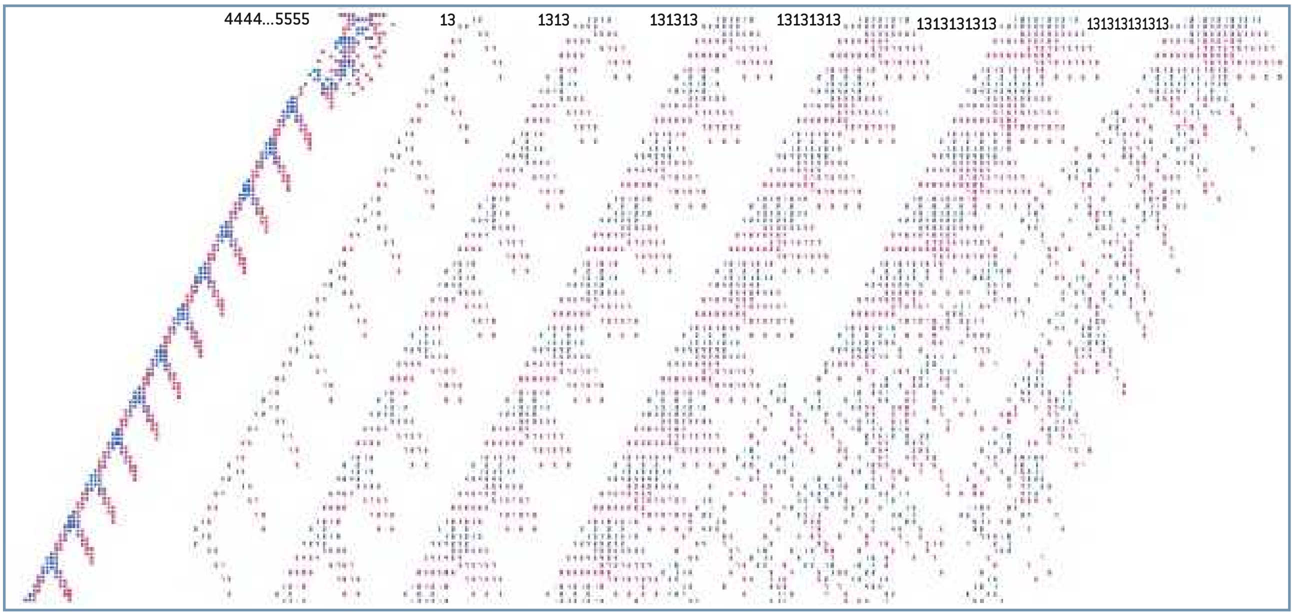
– Les chiffres 2, 4, 6, 8 donnent leurs résultats vers la droite avec un déplacement moyen de (2+4+6+8)/4 = 5 ;

– les chiffres 1, 3, 5, 7, 9 donnent leurs résultats vers la gauche avec un déplacement moyen de (1+3+5+7+9)/5 = 5 ;

– puisqu'en moyenne le déplacement est le même, mais que cinq chiffres vont vers la gauche et quatre vers la droite, si la probabilité d'obtenir un chiffre ne varie pas trop d'un chiffre à l'autre, ce qui est plausible,



1. LA VIE DU CHIFFRE 0. L'entier 0, avec les règles de l'automate cellulaire fixées par Éric Angelini, donne naissance à une dynamique complexe dont il semble aujourd'hui impossible de déterminer le développement précis (personne ne sait dire quel sera l'entier en tête à la génération mille milliards). L'allure générale de l'évolution semble, en revanche, assez prévisible et caractérisée par un élargissement régulier de la partie active s'accompagnant d'un déplacement vers la gauche.



2. VAISSEAUX. Un vaisseau est engendré par 4444...5555 (il est aussi engendré par l'entier 4213). Il se reproduit identique à lui-même à partir de la génération 18......79, et se déplace alors de cinq cases toutes les neuf générations. Les entiers 13, 1313, 131313, 13131313, 1313131313 engendrent chacun un vaisseau. Ce n'est pas le cas de 131313131313 qui s'autodétruit rapidement (et détruit des vaisseaux posés devant lui). Gilles Esposito-Farèse a recherché systématiquement les vaisseaux : il a pris tous les entiers de 0 à 250000 et en a calculé 120 générations. Il a trouvé des vaisseaux de divers types. Plus de détails sur : http://www.cet-teadressecomportecinquantesignes.com/AutomateNBR03.htm.

on doit observer un déplacement général de la partie active vers la gauche.

Pour l'élargissement régulier, des raisonnements heuristiques du même type conduisent au résultat qu'en général, on doit s'attendre à un élargissement du motif au cours des générations.

Même s'ils aident à comprendre et permettent de prévoir des phénomènes numériques trop complexes pour être traités avec une parfaite rigueur, les raisonnements heuristiques produisent parfois des résultats faux dans des cas particuliers, et, si on est maladroit, des résultats qui peuvent être en totale contradiction avec l'observation.

Constaté, mais pas démontré

Ici, aucune exception n'a jamais été trouvée au déplacement vers la gauche, mais l'élargissement d'une configuration n'est pas systématiquement vérifié. La configuration proposée pour s'exercer à l'addition est justement un cas particulier où l'élargissement ne se produit pas : régulièrement, la même ligne revient décalée vers la gauche *(voir la figure 2)*.

Plus précisément : à partir de la ligne 18......79, toutes les neuf générations, le même motif réapparaît déplacé de cinq cases vers la gauche. C'est ce qu'on nomme un glisseur ou un vaisseau. Puisqu'on retrouve cycliquement toujours les mêmes lignes, l'élargissement cesse. Aujourd'hui, on ne connaît pratiquement rien de certain sur les propriétés globales de *SoupAutomat*. Une multitude de questions se posent. Examinons une à une les plus simples.

– Déplacement vers la gauche ?

On constate que toutes les configurations, quelle que soit la ligne initiale, se déplacent vers la gauche. Personne n'en a jamais trouvé une qui aille vers la droite. Rien n'interdit cependant qu'il y en ait. Rien n'empêche non plus qu'une démonstration mathématique établisse que toute configuration glisse vers la gauche. Qui saura résoudre cette énigme à l'apparence élémentaire ?

– La vitesse de déplacement est-elle toujours la même ?

Dans un cas typique, le centre de la partie active, son côté gauche et son côté droit se déplacent tous les trois. Il semble que, pour chacun de ces trois repères, le déplacement se fasse avec une certaine régularité. Peut-on le démontrer ? Peut-on au moins donner des précisions de nature statistique sur ces vitesses de déplacement ?

Attention : s'il y a des vitesses caractéristiques, celles-ci ne concerneront pas toutes les configurations, car les vaisseaux, comme on va le voir plus loin, ont des vitesses de déplacements variées. Des résultats statistiques sur les vitesses de déplacement ne seront vrais qu'en général, avec des cas échappant à la règle.

– Vitesse maximale de déplacement ?

Pour l'instant, la vitesse de déplacement la plus rapide observée est de sept cases toutes les quatre générations, soit $7/4 = 1{,}75$ (voir vaisseaux P4D–7). C'est très inférieur à la vitesse limite théorique qui est de neuf cases par génération. Peut-on faire mieux que 7/4 ? Peut-on démontrer qu'on ne fera pas mieux ? Mêmes questions pour la vitesse minimale.

– Densité des zones actives ?

Les zones actives présentent un aspect général assez uniforme. Quels sont les paramètres de ces zones : densité moyenne des cases non vides, moyenne des valeurs prises, répartition égale ou non entre les chiffres ? Tout reste à faire au sujet de la « physique statistique » de ce monde.

Venons-en à ce qui pour l'instant est le mieux connu : les vaisseaux.

Six familles de navires... ou plus

Le premier vaisseau identifié l'a été par Douglas McNeil et est particulièrement simple puisqu'il provient de l'entier 13 *(voir la figure 2)*. Comme celui déjà rencontré plus haut, c'est un vaisseau qui se déplace de cinq cases vers la gauche toutes les neuf générations. Nous dirons que c'est un vaisseau de type P9D–5 (période 9, déplacement –5).

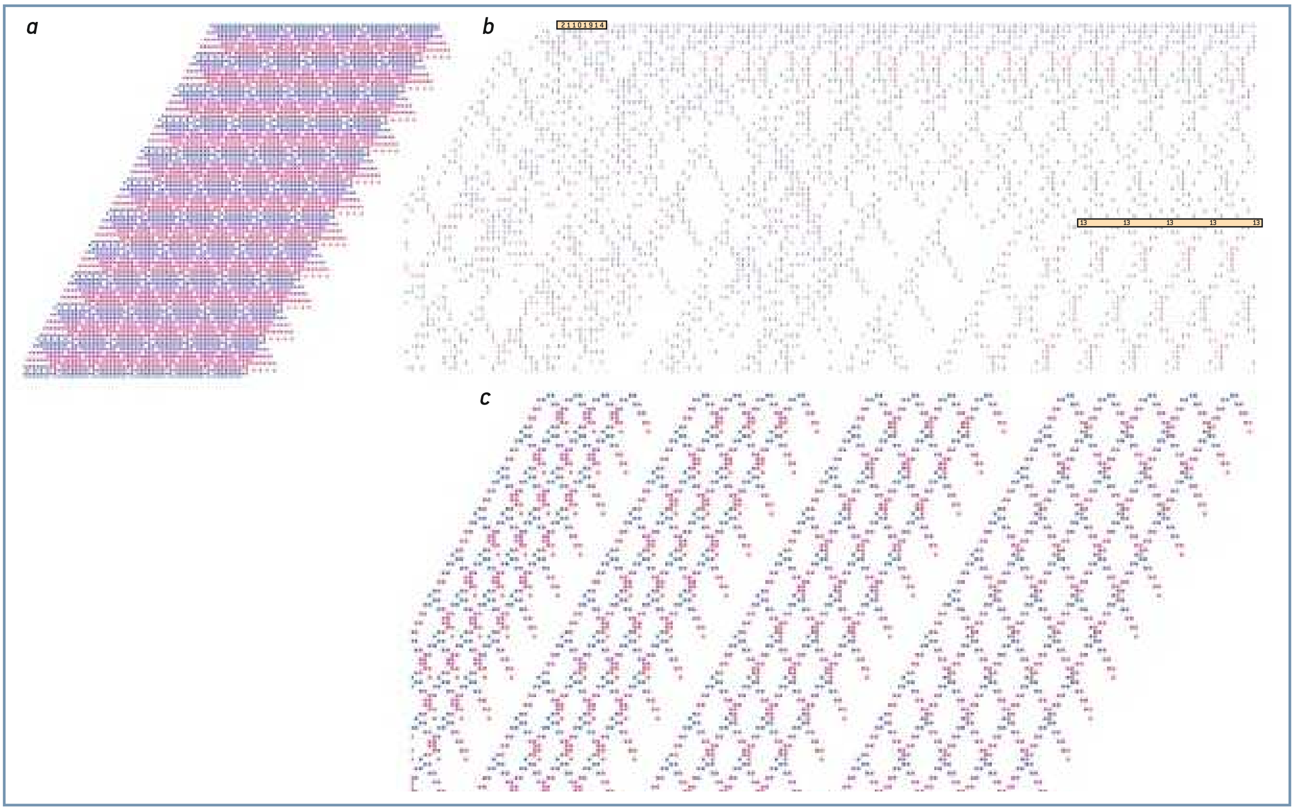
Les entiers 1313, 131313, 13131313 et 1313131313 engendrent aussi des vaisseaux de type P9D–5, mais pas 131313131313 qui redonne le schéma standard d'un élargissement progressif.

Les études de Douglas MacNeil et Gilles Esposito-Farèse ont permis d'identifier six types de vaisseaux : P9D–5, P16D–11, P6D–6, P4D–7, P26D–15, P18D–10. On ne sait pas s'il existe d'autres types de vaisseaux, ni s'il existe une infinité de types de vaisseaux différents. Notons bien que les recherches entreprises jusqu'à présent n'ont jamais permis de découvrir de motifs purement périodiques (vaisseaux immobiles), ni de vaisseaux se déplaçant vers la droite.

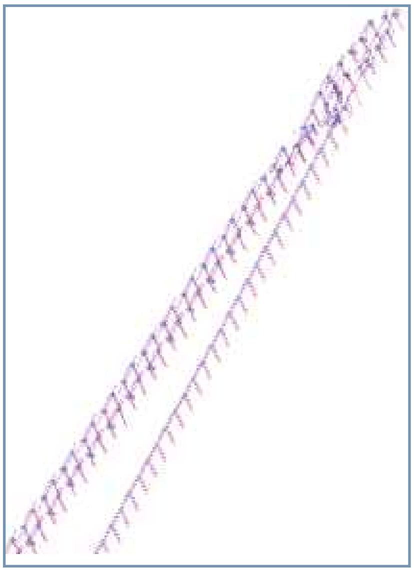
En revanche, on connaît une méthode, mise au point par G. Esposito-Farèse, qui donne des vaisseaux aussi longs que l'on veut et qui ne consiste pas seulement à disposer assez éloignés les uns des autres des vaisseaux identiques *(voir la figure 3)*.

Un problème simple non résolu

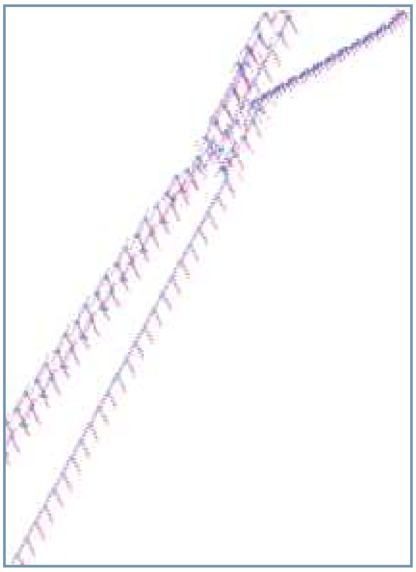
Notons une chose remarquable : puisque le comportement des configurations qui s'élargissent n'est pas compris dans le détail, on n'est jamais certain que ces configurations continuent toujours de s'élargir et que le nombre de chiffres qu'elles contiennent augmente sans limites. Dans chaque cas particulier, il est possible que la séquence



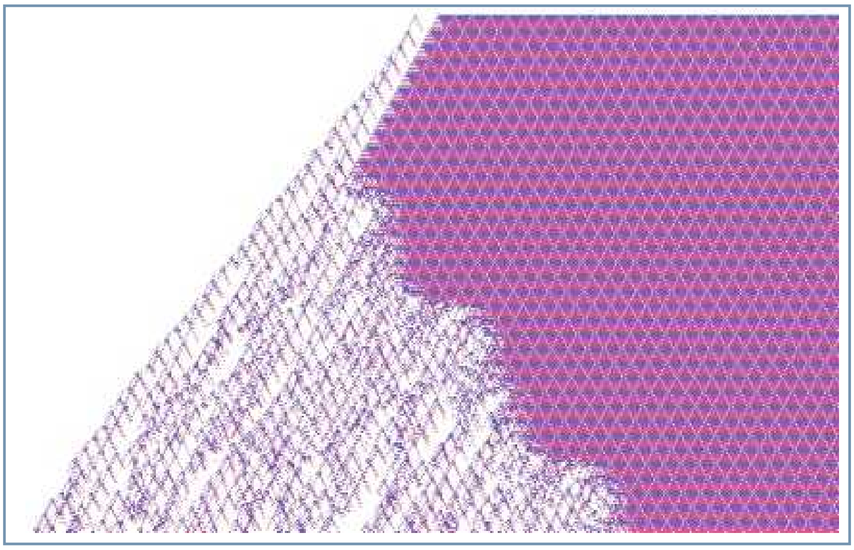
3. VAISSEAUX allongeables et vaisseaux Gardner. L'entier 28202020209 est un motif de vaisseau allongeable, ce qui veut dire que collé à lui-même plusieurs fois, il donne toujours un vaisseau *(a)*. Ce motif découvert par Gilles Esposito-Farèse permet d'affirmer qu'il existe des vaisseaux de taille aussi grande qu'on le veut. En partant des chiffres de la date de naissance de Martin Gardner, le 21 octobre 1914, ce qui donne 21101914 (répétée, *b*), on trouve des motifs de base de vaisseau allongeable avec 13...... (13 suivi de six espaces) *(c)*. En l'honneur de Martin Gardner, nous baptiserons vaisseaux Gardner tous les vaisseaux composés en mettant côte à côte des séquences de la forme 13... On ne sait pas caractériser les vaisseaux Gardner, c'est-à-dire indiquer avec précision quels assemblages de 13 et de ... donnent des vaisseaux.



4. UN ENTIER SINGULIER, 887, produit à lui tout seul deux vaisseaux qui s'éloignent l'un de l'autre sans interagir, ce qui garantit que la largeur de la ligne s'accroît infiniment. C'est un premier pas vers la démonstration qu'il existe des lignes de départ dont le nombre de chiffres s'accroît sans borne (pour l'instant, on ne sait pas démontrer rigoureusement ce résultat).



5. DEUX VAISSEAUX en donnent deux autres : c'est une magnifique découverte de Gilles Esposito-Farèse. Les deux vaisseaux engendrés par les deux nombres 29452 et 46811 séparés de 60 espaces se rencontrent, et de leur interaction naissent deux nouveaux vaisseaux qui s'écartent l'un de l'autre.



6. DÉPLACEMENT VERS LA DROITE. On n'a trouvé jusqu'à maintenant aucun vaisseau se déplaçant vers la droite. Cela n'interdit pas de faire se déplacer de l'information vers la droite. Une façon contrôlée de faire circuler de l'information vers la droite est de placer un vaisseau infini vers la droite qui crée un substrat régulier, et de faire réagir un entier (ici 0) avec ce substrat. La rencontre dont on peut programmer l'instant en éloignant plus ou moins l'entier du substrat régulier engendre une onde dans le substrat régulier. Cette onde, dans certains cas, se déplace avec régularité. Dans l'exemple donné ici, l'onde de désintégration se déplace vers la droite à une vitesse de *77* cases toutes les 99 générations très précisément, et constitue donc un pseudo-vaisseau se déplaçant vers la droite.

devienne un vaisseau au bout d'un certain temps : cela semble peu probable, mais comment le démontrer ? Au final donc, on ne connaît aucune configuration dont on soit mathématiquement certain que son nombre de chiffres augmente toujours : on le voit expérimentalement dans une majorité des cas, mais on ne sait jamais le démontrer. Qui saura établir définitivement que certaines lignes de départ provoquent un accroissement sans borne du nombre de chiffres présents sur les lignes ?

Une piste se trouve peut-être dans la dynamique étonnante engendrée par l'entier 887. Ce nombre produit deux vaisseaux de types différents qui s'écartent l'un de l'autre *(voir la figure 4)*.

La largeur de la ligne active augmente donc infiniment et c'est mathématiquement sûr du fait de la périodicité des comportements, mais ce n'est pas le cas du nombre de chiffres de la configuration.

Pour résoudre cette énigme, il faudrait trouver l'équivalent du fameux lance-glisseur du *Jeu de la vie* : une configuration qui lance périodiquement un vaisseau s'éloignant de la partie centrale de la configuration, elle-même présentant un comportement de vaisseau. Qui trouvera le lance-glisseur de *SoupAutomat* ?

Quelques merveilles

Parmi les jolies choses découvertes au sujet des vaisseaux, en voici quatre, dues toujours à G. Esposito-Farèse :

– Le vaisseau 4...3.8.......7...6...9510.....2 utilise chaque chiffre une fois et une seule. On ignore si on peut faire plus court, mais c'est sans doute possible.

– La rencontre de vaisseaux ayant des vitesses différentes ne donne le plus souvent que le schéma typique d'élargissement chaotique avec déplacement vers la gauche. Un cas intéressant a cependant été trouvé de deux vaisseaux donnant naissance à deux nouveaux vaisseaux *(voir la figure 5)*.

– Même si aucun vaisseau connu ni aucune ligne de départ connue ne vont vers la droite, il est possible de faire se déplacer de l'information vers la droite de ligne en ligne. Une première méthode consiste à prendre comme génération initiale une ligne infinie 010101010101... Cette ligne se reproduit elle-même toutes les huit générations, sauf pour le début qui, déstabilisée, provoque une onde de chaos qui se déplace vers la droite et envahit la ligne.

Une autre méthode, un peu mieux contrôlable consiste à créer une ligne infinie vers la droite en répétant sans cesse 28202020209. Ce vaisseau infini (car c'en est bien un) constitue une sorte d'espace régulier dans lequel on peut faire circuler une information vers la droite. Pour cela, on place à l'avant de cet espace régulier un motif banal (par exemple un 0 ou un vaisseau). De manière contrôlée et différée, on provoque la destruction du vaisseau infini avec, comme précédemment, une onde de chaos se déplaçant rapidement vers la droite. Si on place un 0 à 13 cases de distance du vaisseau infini, l'onde de destruction est régulière et désintègre le vaisseau en créant un motif de destruction périodique avançant précisément à la vitesse de 99 cases toutes les 77 générations *(voir la figure 6)*. Il s'agit d'une sorte de vaisseau laissant des saletés derrière lui (dénommé « puffeur » au *Jeu de la vie*).

Puisqu'une ligne composée de chiffres et de points constitue un départ possible pour une cascade, on peut s'intéresser aux dates en format JJ.MM.AA. Les dates qui produisent des vaisseaux sont sans doute particulièrement importantes.

Pour l'année 2001, on en trouve trois : 20.05.01, 13.06.01 et 11.08.01. On ne trouve donc pas le 11.09.01 qui conduit à une banale cascade chaotique. Les Nostradamus contemporains qui rêvaient de moderniser leurs méthodes seront peut-être déçus... à moins qu'ils apprennent à déchiffrer le chaos engendré par la majorité des dates et en tirent des prédictions. Une science ésotérique de type astrologie naîtra peut-être de *SoupAutomat* ?

Calculer avec *SoupAutomat*

On sait que le *Jeu de la vie* (automate cellulaire bidimensionnel) possède un pouvoir computationnel universel : on peut y programmer tout calcul moyennant l'élaboration d'une bonne configuration de départ. On sait aussi que certains automates unidimensionnels ont ce même pouvoir de calcul universel. La démonstration en a été donnée en 2001 par Matthew Cook pour l'automate 110 qui ne comporte que deux sortes de cellules, 0 et 1 (alors que *SoupAutomat* en comporte 11). Le devenir d'une case à la génération n ne dépend que de son état à la génération $n-1$ et de l'état de ses deux voisines à la génération $n-1$.

Une case contenant un 0 entouré de deux 0 à la génération $n-1$ contiendra un 0 à la génération n, ce que l'on note 000→0. L'ensemble des règles de l'automate est donné par le tableau suivant :

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	1	0	1	1	0

La démonstration de M. Cook utilise des vaisseaux et des interactions entre vaisseaux. Avec *SoupAutomat*, il semble que nous soyons dans une situation aussi riche, et il est donc probable que *SoupAutomat* possède lui aussi un pouvoir computationnel universel. Avant d'obtenir ce résultat, il faudra d'abord progresser et comprendre très finement toutes les interactions entre vaisseaux.

Note à propos d'un article ancien

Dans la rubrique *Logique & Calcul* de mars 2007, où j'évoquais les inventions récréatives d'Éric Angelini, je présentais sa suite du lézard.

Elle commence ainsi :

S = 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 ...,

et possède la double propriété : *(a)* en prenant un élément sur trois *(en rouge)*, on obtient S à nouveau, et *(b)* ce qui reste *(en noir)* est encore la suite S. Noté de façon symbolique, S vérifie donc : S = S/3 = S – S/3.

On posait la question de savoir si la suite du lézard est périodique à partir d'un certain point, question non résolue au moment où l'article était rédigé.

Le problème a été résolu négativement par un lecteur dans le cas général où 3 est remplacé par un entier k quelconque supérieur ou égal à 3. Lambert Rosique, qui est étudiant en mathématiques à Marseille, propose sa démonstration dans un document déposé sur :

http://lambertrosique.free.fr/fractale.pdf

L'AUTEUR

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Éric Angelini, Site personnel : www.cetteadressecomportecinquantesignes.com/

Éric Angelini, Pages de résultats sur *SoupAutomat* : www.cetteadressecomportecinquantesignes.com/AutomateNBR01.htm

Gilles Esposito-Farèse, Page dynamique permettant de faire fonctionner *SoupAutomat* : www.gef.free.fr/automate.php

Jacques Tramu, Page dynamique permettant de faire fonctionner *SoupAutomat* : www.echolaliste.com/seq.htm

Frank Buss, *Programme pour calculer un grand nombre de générations de SoupAutomat :* (en Python et avec Golly) : www.frank-buss.de/automaton/SoupAutomat/

Matthew Cook, **Universality in Elementary Cellular Automata**, *Complex Systems*, vol. 15, pp. 1-40, 2004.